



ISSN 1998-8621

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

№ 4(24) 2013



Tomsk State University
Journal of Mathematics and Mechanics

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013

№ 4(24)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Гриншпон С.Я., Рогозинский М.И. k -вполне транзитивность однородно разложимых групп 5

Зюзьков В.М. Последовательность $Fibonacci(n) \bmod n$ 15

Кайгородов Е.В. Хопфовы вполне разложимые группы без кручения 24

Несмеев Ю.А. Развитие одного подхода к решению алгебраического уравнения 4-й степени 29

Онищук Н.М. Экстремали геодезического кручения неголомомного распределения 39

Царев А.В. T -кольца и факторно делимые группы ранга 1 50

Чехлов А.Р., Агафонцева М.В. Об абелевых группах с центральными квадратами коммутаторов эндоморфизмов 54

МЕХАНИКА

Биматов В.И., Савкина Н.В. Экспериментально-расчетный метод определения нелинейных аэродинамических характеристик острого конуса 60

Каракулов В.В., Смолин И.Ю., Скрипняк В.А. Численная методика прогнозирования эффективных механических свойств стохастических композитов при ударно-волновом нагружении с учётом эволюции структуры 70

Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряжённое состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче 78

Севастьянов Н.Н. Создание математической модели внешних возмущающих моментов для режима «прогноз» спутника связи «Ямал-200» 88

Скрипняк В.В., Лобанов Д.В., Скрипняк В.А., Янюшкин А.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния в пластине из композиционного материала (WC – Co) при алмазном затачивании 99

Смолин А.Ю., Анисеева Г.М., Шилько Е.В., Псахье С.Г. Моделирование деформации наноструктурных покрытий на титановой подложке при наноиндентировании 111

Шваб А.В., Марценко А.А., Марценко М.С. Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смесительном бункере 126

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 133

2. Получение экспериментальных данных о внешнем моменте КА «Ямал-200»

Значения действующих на космический аппарат внешних моментов для спутника связи, находящегося на геостационарной орбите, оказалось возможным получить по результатам обработки телеметрических данных о работе системы ориентации этих спутников на участках их штатного функционирования. Созданный для спутников этой серии новый центр управления полетом [2] позволяет структурировать и запоминать на сервере полный поток телеметрической информации о параметрах всех процессов, имевших место на каждом космическом аппарате во все время его функционирования. Благодаря этому была получена возможность провести обработку информации о длительном (два года) периоде функционирования системы ориентации. На протяжении всего этого периода поддерживалась точная ориентация КА в ОСК (погрешности не более 15 угловых минут) и была доступна для обработки информация об угловых скоростях КА и о скоростях вращения инерционных маховиков. Общая идея построения алгоритма оценки внешних моментов состояла в следующем:

- производилась оценка угловых скоростей вращения инерционных маховиков; используя обозначения статьи [3] и формулы из нее (21), возможно получить оценку кинетического момента маховиков

$$\hat{H}_B = \sum_{i=1}^3 I_i \hat{\omega}_i, \quad \hat{H}_{Bi} = I_i \hat{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь ω_i, ω_i – векторные и скалярные величины скоростей вращения маховиков; I_i – моменты инерции маховиков (известные величины);

Оценка полного кинетического момента КА

$$\hat{G}_B = J_{BB} \cdot \hat{\omega}_B + \hat{H}_B, \quad \hat{G}_{Bi} = J_{Bi} \hat{\omega}_{Bi} + I_i \hat{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

в векторном и скалярном видах, значения тензора инерции КА приведены выше и справедлива вторая (скалярная) часть формулы (5). Компоненты вектора внешних моментов после этого могут быть вычислены (построены) согласно уравнениям движения (22) из [3]:

$$\begin{aligned} M_{d1} &= \dot{\hat{G}}_{B1} + \hat{\omega}_{B2} \hat{G}_{B3} - \hat{\omega}_{B3} \hat{G}_{B2}, \\ M_{d2} &= \dot{\hat{G}}_{B2} + \hat{\omega}_{B3} \hat{G}_{B1} - \hat{\omega}_{B1} \hat{G}_{B3}, \\ M_{d3} &= \dot{\hat{G}}_{B3} + \hat{\omega}_{B1} \hat{G}_{B2} - \hat{\omega}_{B2} \hat{G}_{B1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы реализовать описанный подход к оцениванию суммарного возмущающего момента, необходимо располагать методом восстановления фактического движения КА по телеметрической информации. Ниже используется метод, основанный на аппроксимации вращательного движения спутника сплайнами.

Для уменьшения случайных ошибок при определении значений угловой скорости спутника использовался процесс сглаживания (аппроксимации функции), основанный на применении метода наименьших квадратов. Аппроксимация выполнялась покомпонентно с использованием решения следующей задачи. Пусть для моментов времени t_m ($m = 0, 1, \dots, M$), $t_m < t_{m+1}$, известны приближенные значения $x_m \approx f(t_m)$ некоторой гладкой функции $f(t)$. Требуется восстановить эту функцию на отрезке $t_0 \leq t \leq t_M$.

Отыскание $f(t)$ в предположении, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема, сводится к решению вариационной задачи

$$\int_{t_0}^{t_M} [\ddot{f}(t)]^2 dt \rightarrow \min, \quad \sum_{m=0}^M [x_m - f(t_m)]^2 \leq S. \quad (8)$$

Здесь S – заданное положительное число. Решением задачи (8) является кубический сплайн.

Предполагалось, что измеренные значения угловой скорости имеют одинаковую точность и функция $\hat{\omega}_{Bi}(t_m)$ на участке измерений может быть достаточно хорошо приближена многочленом третьей степени. В результате по наблюдаемым значениям функции в точках измерений методом наименьших квадратов построен многочлен третьей степени, аппроксимирующий функцию $\hat{\omega}_{Bi}(t_m)$, и за значения этой функции принимались значения $\hat{\omega}'_{Bi}(t_m)$ полученного многочлена в точках t_m . Вычисление выполнялось по четырем точкам с использованием следующего выражения:

$$\hat{\omega}'_{Bi}(t_m) = \frac{1}{35} (-3\hat{\omega}_{Bi}(t_{m-2}) + 12\hat{\omega}_{Bi}(t_{m-1}) + 17\bar{\omega}(t_m) + 12\hat{\omega}_{Bi}(t_{m+1}) - 3\hat{\omega}_{Bi}(t_{m+2})). \quad (9)$$

Такое определение угловой скорости спутника позволило уменьшить влияние ошибок измерений при последующей аппроксимации функции $\hat{\omega}'_{Bi}(t_m)$, которая выполнялась для получения значений угловой скорости в требуемые моменты времени.

Аналогичный метод использовался при вычислении значений кинетических моментов маховиков \hat{H}'_{Bi} по информации о скоростях их вращения, получаемых по сигналам прохождения ротора каждого маховика четырех точек за один оборот. При фильтрации угловых скоростей маховиков нужно учитывать стабилизирующие колебания в контуре управления, так что интервал осреднения выбирался с учетом этого обстоятельства.

На рис. 1 – 3 в качестве примера представлены обработанные таким образом данные по поведению компонент кинетического момента \hat{G}'_{Bi} ($i = 1, 2, 3 - x, y, z$) для спутника «Ямал-201». Можно видеть, что поведение составляющих кинетического момента системы хорошо иллюстрируют теорему сохранения кинетического момента: проекции кинетического момента на оси связанной системы координат, достаточно точно ориентируемой в равномерно вращающейся орбитальной системе координат, близки к гармоническим функциям по 1 и 2 каналам.

Выделенные из этих экспериментальных зависимостей величины внешних моментов согласно соотношениям (7) представлены на рис. 4 – 6, где приведены покомпонентные зависимости поведения по времени моментов, действующих на космический аппарат.

Можно видеть, что прослеживается регулярность поведения этих зависимостей по времени, соответствующая регулярному движению Солнца относительно орбитальной и соответственно связанной системы координат.

Высокую точность оценок внешних возмущающих моментов подтверждает близость измеренных значений кинетического момента спутника (серые маркеры на рис. 1 – 3) и расчётных значений, полученных путём решения системы уравне-

ний (7) относительно значений суммарного кинетического момента G с использованием в расчётах оценок возмущающих моментов.

На рис. 7 – 9 показаны такие зависимости на интервале один год.

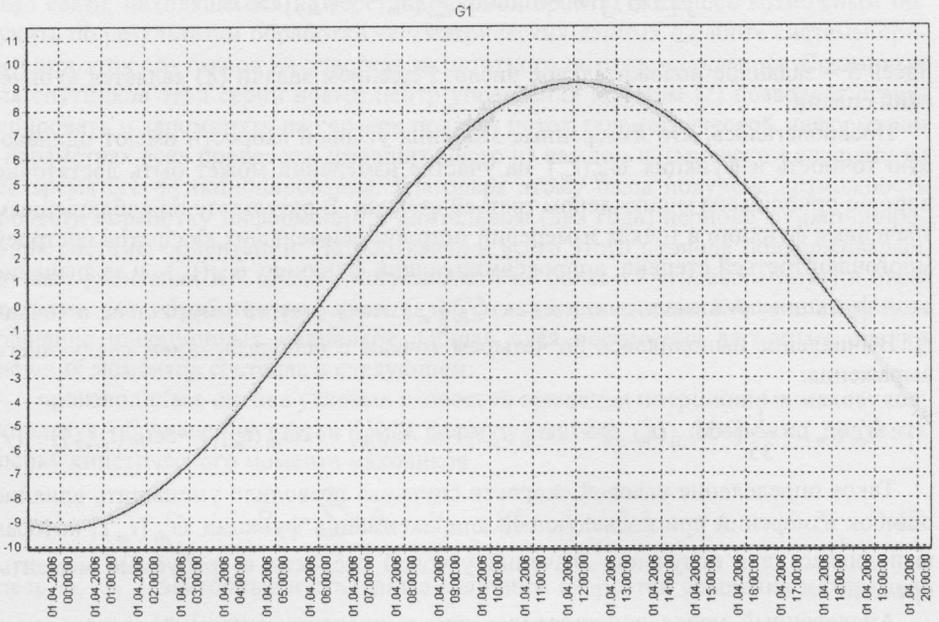


Рис. 1. Суточное изменение кинетического момента (канал крена)

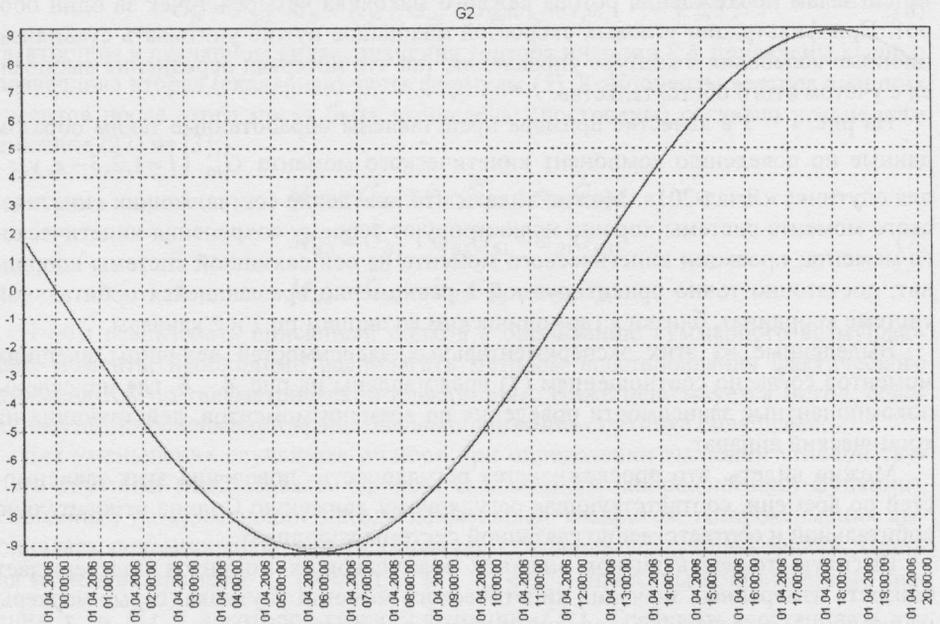


Рис. 2. Суточное изменение кинетического момента (канал рысканья)

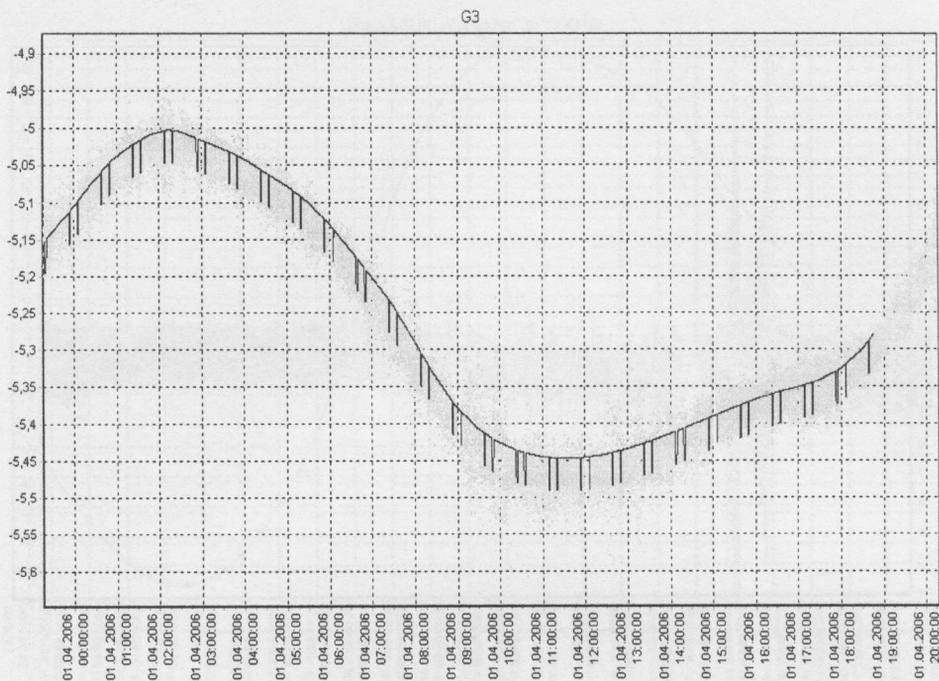
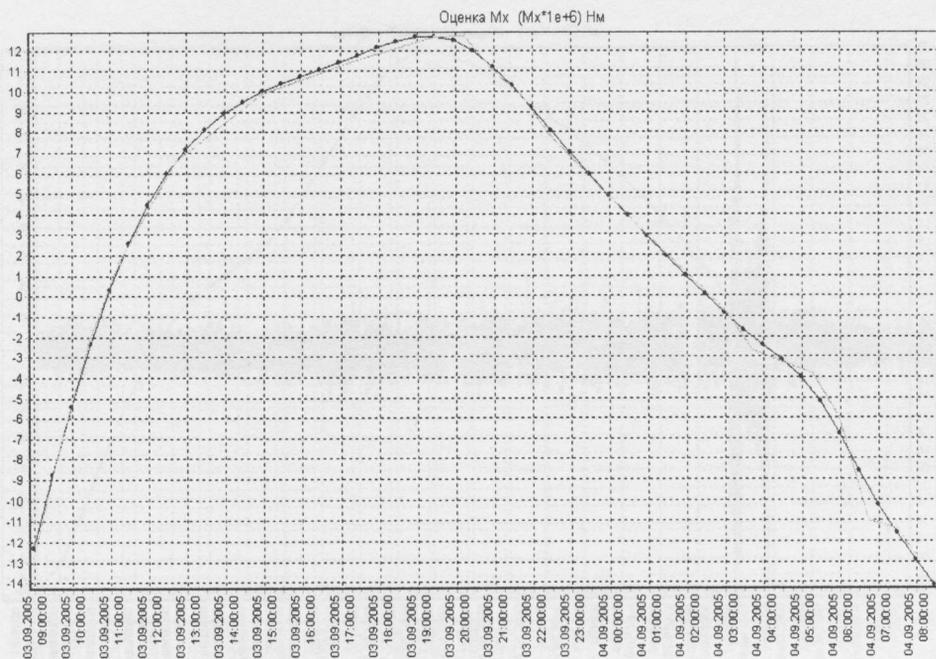


Рис. 3. Суточное изменение кинетического момента (канал тангажа)

Рис. 4. Суммарный возмущающий момент, действующий на КА «Ямал-200» № 1.
Канал крена, интервал измерений – сутки

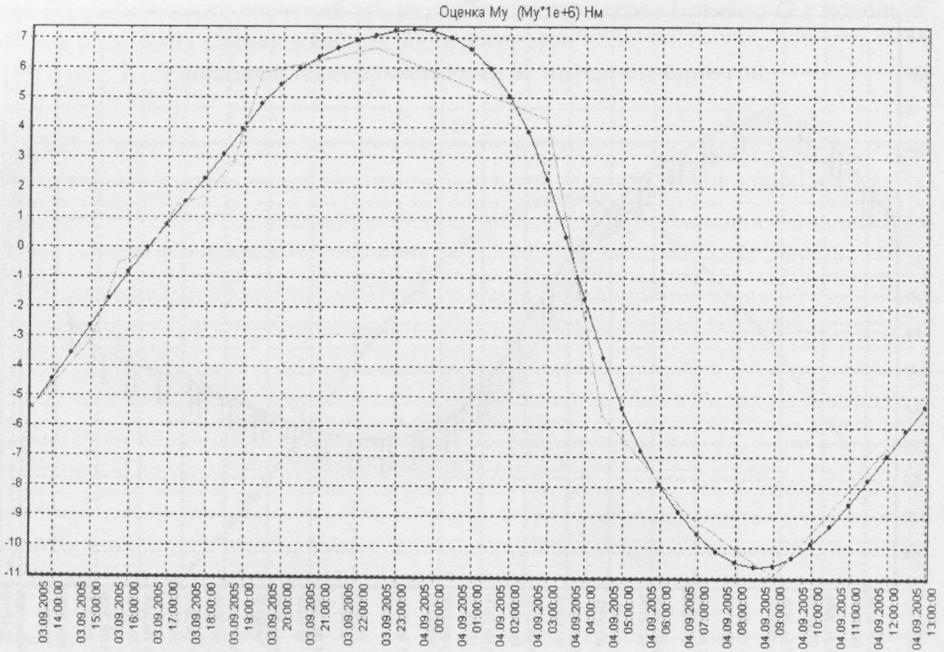


Рис. 5. Суммарный возмущающий момент, действующий на КА «Ямал-200» № 1. Канал рысканья, интервал измерения – сутки

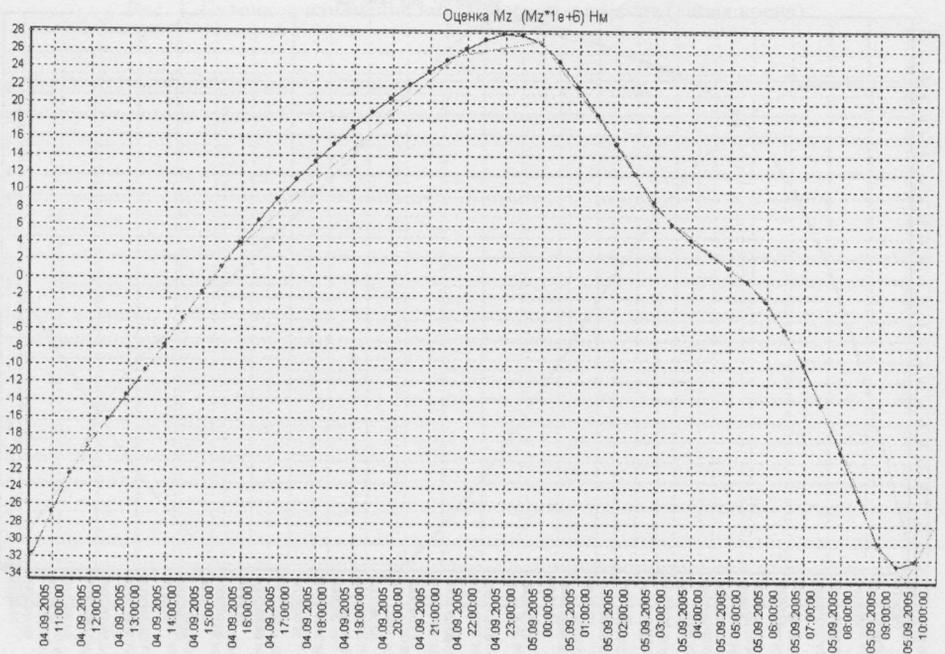


Рис. 6. Суммарный возмущающий момент, действующий на КА «Ямал-200» № 1. Канал тангажа, интервал измерений – сутки

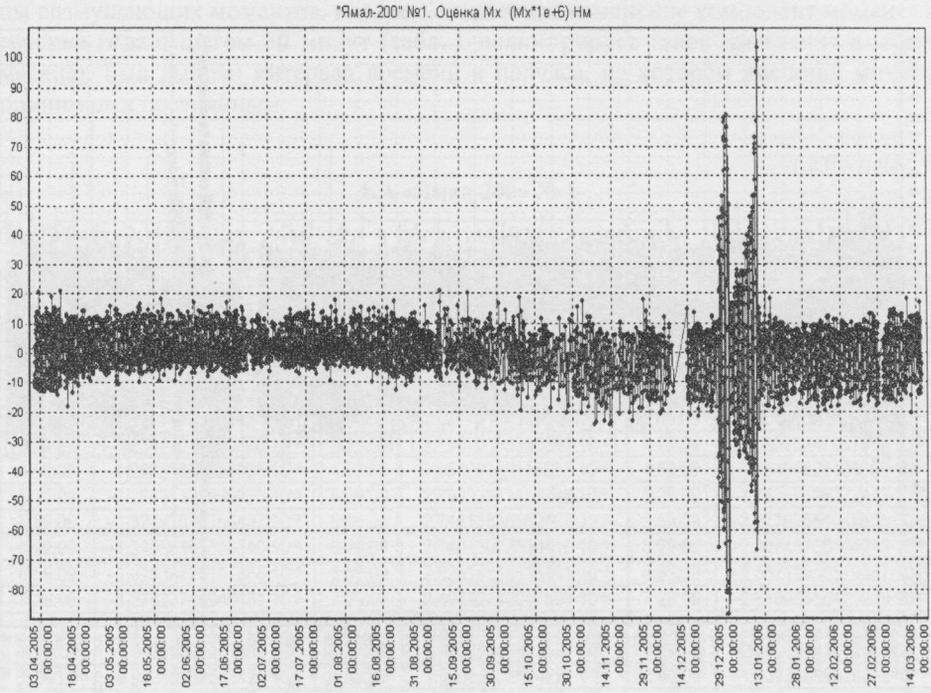


Рис. 7

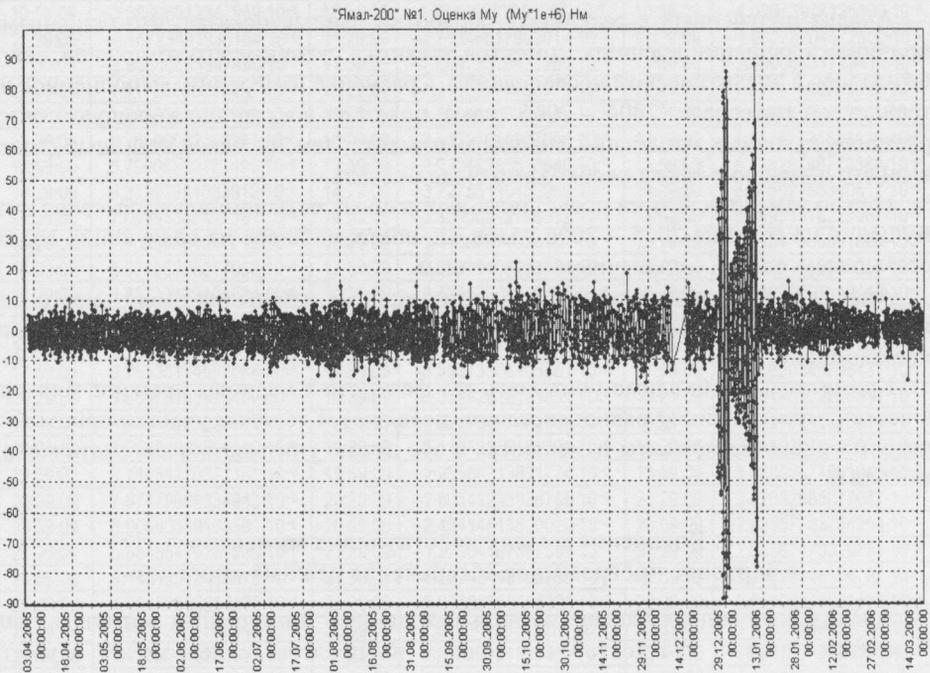


Рис. 8

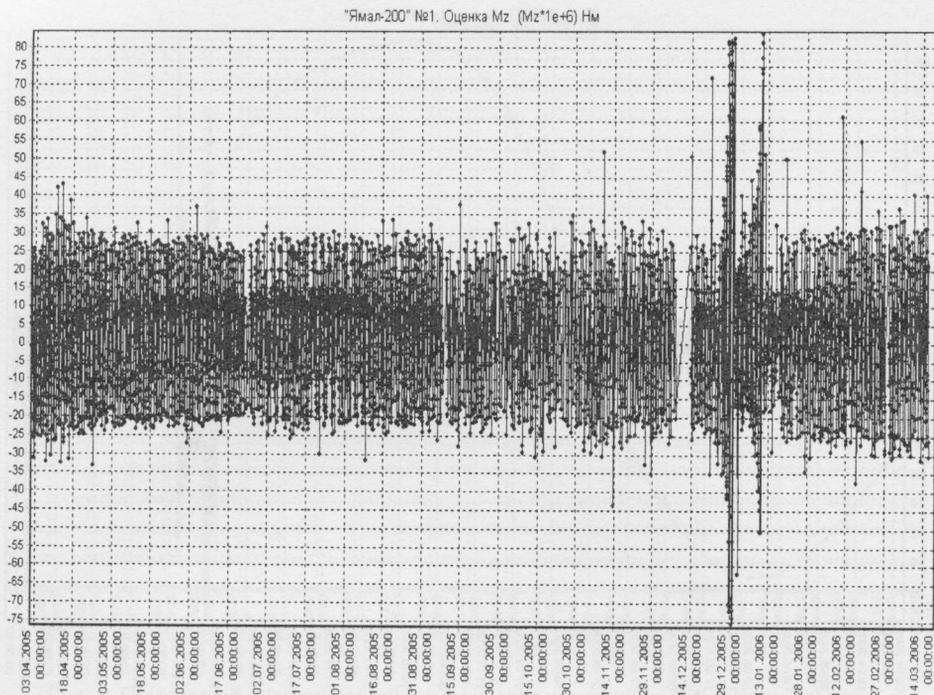


Рис. 9

Анализ полученных в результате обработки данных показал, что основными причинами вариации внешних моментов являются суточные его изменения, как и ожидалось в аналитическом исследовании. Сравнение измерений, выполненное на трехлетнем интервале (2004 – 2006 годы), показало достаточно хорошую повторяемость суточных изменений внешнего момента, тем не менее сезонные (годовые) его изменения также необходимо было оценить.

Нужно заметить, что на представленных данных есть аномально высокие возмущения на границе 2005 – 2006 годов, не повторившиеся на следующих годах, связанные, видимо, с солнечным излучением.

Анализ этих данных показал, что хотя сезонные изменения имеют место, величина и скорость этих изменений позволяют ввести достаточно простую их аппроксимацию.

Кроме того, необходимо учитывать тот факт, что в периоды времени, близкие к весеннему и осеннему равноденствиям, появляются теньевые участки орбиты, на которых внешние моменты изменяются и это нужно учитывать в математической модели.

3. Внедрение модели действующих моментов в бортовое программное обеспечение режима «прогноз»

Анализ полученных экспериментальных данных по внешним возмущающим моментам показал, что достаточно точным их представлением может служить табличное их задание в виде постоянных величин на определенном интервале времени. По результатам расчётов моментов за 3 года были сформированы табли-

цы возмущающих моментов, которые описывают изменение компонент момента в течение года с шагом 30 минут (табл. 1 иллюстрирует такое изменение в марте месяце). Был выбран интервал времени в полчаса, на котором внешний момент принимался постоянным.

Таблица 1

КА «Ямал-200» № 1

M_x (Нм)		M_y (Нм)		M_z (Нм)	
0:59:09	-2.34590058686274·10 ⁻⁶	0:59:09	3.19350757338138·10 ⁻⁶	0:59:09	1.06392140379532·10 ⁻⁵
1:29:09	-4.16967332770144·10 ⁻⁶	1:29:09	3.51510955924068·10 ⁻⁶	1:29:09	5.91524035402144·10 ⁻⁶
1:59:09	-6.08148725971383·10 ⁻⁶	1:59:09	3.62839272766736·10 ⁻⁶	1:59:09	1.97664756389053·10 ⁻⁶
2:29:09	-7.79449936083288·10 ⁻⁶	2:29:09	3.54713054942499·10 ⁻⁶	2:29:09	-1.17585631124855·10 ⁻⁶
2:59:09	-9.27920755835184·10 ⁻⁶	2:59:09	3.33753842539316·10 ⁻⁶	2:59:09	-3.76910397818434·10 ⁻⁶
3:29:09	-1.05846642919321·10 ⁻⁵	3:29:09	3.07641529225083·10 ⁻⁶	3:29:09	-6.07114866658602·10 ⁻⁶
3:59:09	-1.16934803901124·10 ⁻⁵	3:59:09	2.83877165019093·10 ⁻⁶	3:59:09	-8.36441033723945·10 ⁻⁶
4:29:09	-1.23471016290890·10 ⁻⁵	4:29:09	2.69070056558294·10 ⁻⁶	4:29:09	-1.09820247087903·10 ⁻⁵
4:59:09	-1.26381656328098·10 ⁻⁵	4:59:09	2.65498280116853·10 ⁻⁶	4:59:09	-1.40495822105069·10 ⁻⁵
5:29:09	-1.29491320699835·10 ⁻⁵	5:29:09	2.69353341419746·10 ⁻⁶	5:29:09	-1.74354596222443·10 ⁻⁵
5:59:09	-1.32491616355497·10 ⁻⁵	5:59:09	2.74413836562402·10 ⁻⁶	5:59:09	-2.07792554048565·10 ⁻⁵
6:29:09	-1.34056162303746·10 ⁻⁵	6:29:09	2.74043077589416·10 ⁻⁶	6:29:09	-2.36745736404243·10 ⁻⁵
6:59:09	-1.32838728117880·10 ⁻⁵	6:59:09	2.62816818818481·10 ⁻⁶	6:59:09	-2.56719950579887·10 ⁻⁵
7:29:09	-1.27423746946181·10 ⁻⁵	7:29:09	2.40412742047909·10 ⁻⁶	7:29:09	-2.61695456425209·10 ⁻⁵
7:59:09	-1.17412440740278·10 ⁻⁵	7:59:09	2.11519892638714·10 ⁻⁶	7:59:09	-2.49905807901813·10 ⁻⁵
8:29:09	-1.04388602261808·10 ⁻⁵	8:29:09	1.82539400568527·10 ⁻⁶	8:29:09	-2.26202443302498·10 ⁻⁵
8:59:09	-8.98345182565423·10 ⁻⁶	8:59:09	1.53890252924221·10 ⁻⁶	8:59:09	-1.93333699626052·10 ⁻⁵
9:29:09	-7.50440541789356·10 ⁻⁶	9:29:09	1.24482579416021·10 ⁻⁶	9:29:09	-1.53216468684134·10 ⁻⁵
9:59:09	-6.10717083576433·10 ⁻⁶	9:59:09	9.30657212129550·10 ⁻⁷	9:59:09	-1.09121330983690·10 ⁻⁵
10:29:09	-4.81019213464524·10 ⁻⁶	10:29:09	5.77996132939688·10 ⁻⁷	10:29:09	-6.95164798580219·10 ⁻⁶
10:59:09	-3.59606912347959·10 ⁻⁶	10:59:09	1.77410387009288·10 ⁻⁷	10:59:09	-4.02973978125100·10 ⁻⁶
11:29:09	-2.16723491935164·10 ⁻⁶	11:29:09	-2.71346017962017·10 ⁻⁷	11:29:09	-1.93079704472502·10 ⁻⁶
11:59:09	-2.80340535947495·10 ⁻⁷	11:59:09	-7.68875535423250·10 ⁻⁷	11:59:09	-2.35003631729414·10 ⁻⁷
12:29:09	1.91725650298287·10 ⁻⁶	12:29:09	-1.31132974683075·10 ⁻⁶	12:29:09	1.39414188089627·10 ⁻⁶
12:59:09	3.91853423297936·10 ⁻⁶	12:59:09	-1.88516269794861·10 ⁻⁶	12:59:09	3.13266539583555·10 ⁻⁶
13:29:09	5.18596662153281·10 ⁻⁶	13:29:09	-2.45391614907004·10 ⁻⁶	13:29:09	4.91382731633138·10 ⁻⁶
13:59:09	5.79005302763499·10 ⁻⁶	13:59:09	-2.93242385518640·10 ⁻⁶	13:59:09	6.13628746778388·10 ⁻⁶
14:29:09	6.37996351033612·10 ⁻⁶	14:29:09	-3.22755110453962·10 ⁻⁶	14:29:09	6.14592755340617·10 ⁻⁶
14:59:09	7.04641386427361·10 ⁻⁶	14:59:09	-3.36900292796532·10 ⁻⁶	14:59:09	5.29951916226987·10 ⁻⁶
15:29:09	7.73500304281715·10 ⁻⁶	15:29:09	-3.41632874036154·10 ⁻⁶	15:29:09	4.19547356891890·10 ⁻⁶
15:59:09	8.37466228317082·10 ⁻⁶	15:59:09	-3.39373306405551·10 ⁻⁶	15:59:09	3.47287588096255·10 ⁻⁶
16:29:09	8.83753139126534·10 ⁻⁶	16:29:09	-3.43167208041160·10 ⁻⁶	16:29:09	3.91086027112148·10 ⁻⁶
16:59:09	9.14392760591569·10 ⁻⁶	16:59:09	-3.43905257862015·10 ⁻⁶	16:59:09	5.90024806746166·10 ⁻⁶
17:29:09	9.44650798710640·10 ⁻⁶	17:29:09	-3.42544449343409·10 ⁻⁶	17:29:09	9.29535127651703·10 ⁻⁶
17:59:09	9.76835174552686·10 ⁻⁶	17:59:09	-3.39373306405551·10 ⁻⁶	17:59:09	1.36620345396431·10 ⁻⁵
18:29:09	1.00975185926402·10 ⁻⁵	18:29:09	-3.35262929171031·10 ⁻⁶	18:29:09	1.85148222258311·10 ⁻⁵
18:59:09	9.81649303321793·10 ⁻⁶	18:59:09	-3.22172697472599·10 ⁻⁶	18:59:09	2.56286146925611·10 ⁻⁵
19:29:09	9.39182828656182·10 ⁻⁶	19:29:09	-3.11016332131791·10 ⁻⁶	19:29:09	2.78823074405824·10 ⁻⁵
19:59:09	8.74434270372166·10 ⁻⁶	19:59:09	-2.99564713621724·10 ⁻⁶	19:59:09	3.02802877991046·10 ⁻⁵
20:29:09	7.87479866234943·10 ⁻⁶	20:29:09	-2.80641293938765·10 ⁻⁶	20:29:09	3.02032685077087·10 ⁻⁵
20:59:09	6.90990839138591·10 ⁻⁶	20:59:09	-2.48414513600020·10 ⁻⁶	20:59:09	2.83357783784354·10 ⁻⁵
21:29:09	5.98456476261238·10 ⁻⁶	21:29:09	-1.97584167307599·10 ⁻⁶	21:29:09	2.56567470329884·10 ⁻⁵
21:59:09	5.14215519198579·10 ⁻⁶	21:59:09	-1.26748448168853·10 ⁻⁶	21:59:09	2.29923044596782·10 ⁻⁵
22:29:09	4.06459806854379·10 ⁻⁶	22:29:09	-5.01805563485325·10 ⁻⁷	22:29:09	2.05402835631515·10 ⁻⁵
22:59:09	2.69332286758949·10 ⁻⁶	22:59:09	1.68894878743683·10 ⁻⁷	22:59:09	1.82887469499308·10 ⁻⁵
23:29:09	1.42326448201955·10 ⁻⁶	23:29:09	6.85666334169653·10 ⁻⁷	23:29:09	1.62521947464103·10 ⁻⁵
23:59:09	3.74965782316967·10 ⁻⁷	23:59:09	1.08161134610087·10 ⁻⁶	23:59:09	1.43579776120330·10 ⁻⁵
0:29:09	-5.14399632579725·10 ⁻⁶	0:29:09	1.41463640662694·10 ⁻⁶	0:29:09	1.25156983079285·10 ⁻⁵

Такая таблица записывается в память бортовой ЦВМ, и бортовая программа использует табличные данные, сменяемые через заданные интервалы времени, для формирования виртуальной модели возмущения.

Для того чтобы учесть сезонные изменения, используется 9 таких таблиц, переход от одной к последующей также привязан к времени (годовому). Таблицы были составлены для каждого аппарата «Ямал-201» и «Ямал-202», начало временных интервалов отсчитывалось от точки начала года: 01.01.2004 г., 01.01.2005 г., 01.01.2006 г. и т.д.

Моменты в тени формировались аналогичным образом. Значения моментов для КА «Ямал-201», к примеру, оказались постоянными: $M_d = (0,0000008; -0,0000035; 0,000005)$ Н·м. В бортовом программном обеспечении выполняется расчет навигационных данных для формирования углового положения ОСК, кроме того, рассчитывается факт захождения и выхода КА из тени Земли. По этому признаку осуществляется переход от одной схемы формирования момента к другой.

Стандартное отклонение полученных оценок имеет порядок $10^{-8} \dots 10^{-9}$ Н·м. Описанный метод позволил получить достаточно точные результаты, избежав при этом необходимости делать сложные расчёты, используя аналитические выражения, содержащие величины, точные значения которых неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В. Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации космических аппаратов: учеб. пособие. Томск: ТГУ, 2013. 308 с.
2. Севастьянов Н.Н. Разработка концепции, обобщение опыта создания и практики управления космическими аппаратами связи нового поколения (на примере спутниковой системы связи «Ямал»): дис. ... канд. техн. наук / ОАО «Газком», РКК «Энергия им. С.П. Королева. МВТУ им. Баумана. 2007. 158 с.
3. Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема функционирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 85–96.

Статья поступила 30.05.2013 г.

Sevast'yanov N.N. Creation of A mathematical model of external disturbing moments for the "forecast" regime Of the Yamal 200 communication satellite. The nature and basic components of external disturbing moments acting on the orbiting spacecraft are considered. It is shown that only a full-scale experimental measurements provide accurate data on the acting external moments.

Keywords: Communications satellite, geostationary orbit, external disturbance moments, full-scale experimental measurements.

Sevastyanov Nikolay Nikolaevich (Tomsk State University)

E-mail: sevastyanov@gascom.ru